

## De methode van de virtuele arbeid

De methode van de virtuele arbeid is een zeer efficiënte methode voor het berekenen van het evenwicht van samengestelde systemen als men niet geïnteresseerd is in de inwendige krachten. De basisideeën zullen uitgelegd worden aan de hand van een systeem met één puntmassa. Dit zal dan uitgebreid worden naar samengestelde systemen en systemen met meerdere vrijheidsgraden.

Nota: bij de formules staat boven de vectoren een vectorpijl, in de tekst zijn de vectoren alleen vet gedrukt.

### 1. Systeem van één puntmassa

De methode van de virtuele arbeid vertrekt van de energie-beschouwing van het systeem. In differentiaalvorm wordt dit voor 1 puntmassa:

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = d(mv^2 / 2) \quad (I)$$

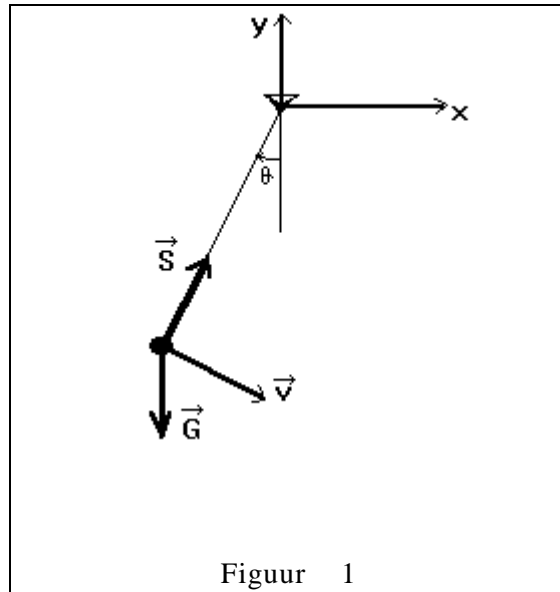
In het linkerlid staat de differentiaal van de arbeid van de uitwendige krachten. Integreer van deze uitdrukking tussen twee posities geeft de arbeid die nodig is voor deze overgang. Een nulpunt van de integrand is een extremum van deze integraal en, volgens I, ook een nulpunt van de versnelling en dus een evenwichtspunt van het systeem. We kunnen deze voorwaarde I herschrijven m.b.v. de betrekking  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  als

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}dt = 0$$

Deze differentiaal heeft nog altijd de dimensie van een arbeid. Het nulpunt moet nog steeds komen van een nulpunt van de integrand:

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v} = 0 \quad (II)$$

Deze integrand kan nu echter nul zijn als de kracht loodrecht staat op de snelheid. Dit is o.a. het geval bij krachten in sommige ideale verbindingen met de omgeving. Deze krachten wisselen geen arbeid uit met het systeem of omdat hun aangrijpingspunt stilstaat of omdat de verplaatsing steeds loodrecht staat op de kracht. Ze kunnen dus weggelaten worden in bovenstaande som. Meer algemeen: bij de methode van de virtuele arbeid moeten we geen rekening houden met de ideale verbindingen maar alleen met de **aktieve krachten**, d.i. de krachten die energie uitwisselen met het systeem bij een verplaatsing van dit systeem.



### Voorbeeld 1.

Laten we dit even uitwerken voor een zeer eenvoudig voorbeeld, nl. de mathematische slinger (zie figuur 1). De optredende krachten zijn hier de spanning  $\mathbf{S}$  in het touw en het gewicht  $\mathbf{G}$ . De spanning  $\mathbf{S}$  staat echter altijd loodrecht op  $\mathbf{v}$ : het touw is een ideale verbinding. We moeten dus alleen zoeken naar het punt waar  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$  nul wordt.

Voor de slinger is het duidelijk dat  $\mathbf{G}$  loodrecht zal staan op  $\mathbf{v}$  in de onderste stand. Dit is dus een evenwichtspositie van de slinger.

## 2. Veralgemeende coördinaten en vrijheidsgraden

Alhoewel in dit voorbeeld de positie van de puntmassa in een twee-dimensioneel systeem m.b.v. twee coördinaten moet gespecificeerd worden, bestaat er een verband tussen beide daar de puntmassa enkel op een cirkelbaan kan bewegen. De positie kan dus, **bij behoud van de bestaande verbindingen**, eenduidig vastgelegd worden met één parameter. Dit kan één van beide coördinaten zijn, maar ook b.v. de hoek van het touw met de verticale. Wanneer zoals hier één parameter voldoende is om de positie van het systeem vast te leggen, spreekt men van een systeem met één **vrijheidsgraad**.

**Het aantal vrijheidsgraden van een systeem is het aantal onafhankelijke parameters dat nodig is om de positie van het systeem eenduidig te bepalen, bij behoud van de bestaande verbindingen.** Deze parameters noemt men de **veralgemeende coördinaten**  $q_j$ .

Onafhankelijk betekent dat het mogelijk is de waarde van één parameter te veranderen zonder dat er iets verandert aan de andere. Bij de methode van de virtuele arbeid zal men niet meer met de cartesische coördinaten werken, maar met deze veralgemeende coördinaten. Dit onderstelt dat er voor elk aangrijpingspunt van een kracht een functie is van de vorm :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n) \quad (\text{III})$$

Dit noemt men de **transformatievergelijkingen**.

De snelheid van de aangrijpingspunten kan nu uitgerekend worden in functie van de veralgemeende coördinaten als:

$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \quad (IV)$$

Voor het voorbeeld van de slinger kan men  $\theta$  als veralgemeende coördinaat gebruiken. Men krijgt dan als transformatievergelijkingen (let op de tekens):

$$\begin{aligned} x &= -l \cdot \sin \vartheta & v_x &= -l \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ y &= -l \cdot \cos \vartheta & v_y &= l \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned}$$

En  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = 0$  wordt:

$$-G \cdot v_y = -G \cdot (l \cdot \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

Oplossing is :  $\theta = 0$  , daar  $d\theta/dt$  de hoeksnelheid is waarmee het punt eventueel door de evenwichtsstand zou passeren.

Er kan opgemerkt worden dat voor één voorwerp de methode van de virtuele arbeid zelden korter uitvalt dan de klassiek methode. Voor het geval van de slinger had men de bovenstaande formule kunnen vinden door de som van de krachten loodrecht op het touw te projecteren (om  $\mathbf{S}$  eruit te houden).

### 3. Samengesteld systeem met één vrijheidsgraad

Er moet nu een dubbele veralgemening gemaakt worden: van een systeem van één puntmassa naar een systeem met meerdere puntmassa's en dan verder naar een systeem met reële voorwerpen.

Bij een systeem met meerdere massa's moet elke massa in evenwicht zijn. Hierbij moet men alle krachten die op elke massa werken in rekening brengen. Wanneer men opnieuw naar energiebeschouwingen overgaat, bestaat er bij een systeem met één vrijheidsgraad een verband tussen de verplaatsingen (en de snelheden) van de verschillende puntmassa's. Wanneer men rekening houdt met deze verbanden, valt bij sommeren over alle onderdelen niet alleen de bijdragen van de ideale verbindingen met de omgeving weg, maar ook de bijdrage van de ideale inwendige verbindingen. Deze geven dan immers alleen energie door van het ene onderdeel naar het andere, maar vermeerderen of verminderen de totale som niet.

Bij reële onvervormbare voorwerpen leidt de energiestelling tot de stelling van König : de arbeid van alle krachten gaat naar de kinetische energie van het massacentrum (met de totale massa eraan toegekend) en een kinetische energie van beweging t.o.v. het massacentrum. Bij onvervormbare voorwerpen kan dit laatste alleen een rotatiebeweging zijn. In differentiaalvorm is dit:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m \vec{a}_c \cdot d\vec{r}_c + I \vec{\alpha} \cdot d\vec{\vartheta}$$

Bij evenwicht moeten beide leden nul zijn. We kunnen dus ook werken met de verplaatsingen (of snelheden) van de aangrijpingspunten van krachten op reële onvervormbare voorwerpen. Deze betrekking zullen we opnieuw tegenkomen bij de methode van d'Alembert.

Men zou II nu moeten schrijven met een dubbele som: over alle krachten op elke puntmassa en over alle puntmassa's. Meestal beperkt men zich tot één som over alle krachten, waarbij sommige verplaatsingen (of snelheden) dezelfde kunnen zijn. Men krijgt nu i.p.v. II :

$$\sum_i (\vec{F}_i \bullet \vec{v}_i) = 0. \quad (V)$$

met i lopend over alle krachten

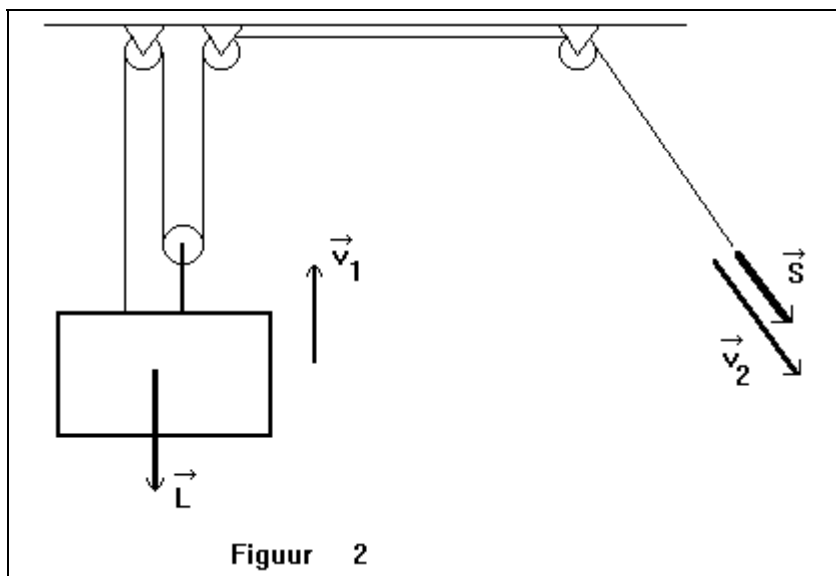
Hierbij moet nu niet elke term nul zijn. Er zullen normaal positieve en negatieve termen optreden. De evenwichtspositie zal die positie zijn waar, bij een doorgang van het systeem door deze positie, het toegevoerde vermogen precies gelijk is aan het afgevoerde vermogen.

In deze vermogensbalans heeft de bijdrage van elke kracht een zekere gewichtsfactor. Dit gewicht bestaat uit twee elementen:

- de cosinus van de hoek tussen de kracht en de snelheid. Niet de volledige kracht moet verrekend worden, maar, door het scalair product, alleen de projectie van de kracht op de raaklijn aan de baan van het aangrijpingspunt;
- de verhouding van de snelheden van de verschillende aangrijpingspunten. In de formule staan de snelheden van de aangrijpingspunten, maar, daar de som nul moet zijn, hebben uiteindelijk alleen de onderlinge verhoudingen van de snelheden belang.

### Voorbeeld 2

Laten we dit even toepassen op een systeem met twee actieve krachten en 1 vrijheidsgraad.



De krachten om de vaste katrollen op hun plaats te houden leveren geen arbeid en worden dus niet in rekening gebracht (ideale verbindingen met de omgeving). De uitdrukking voor het evenwicht wordt dus:

$$\vec{L} \bullet \vec{v}_1 + \vec{S} \bullet \vec{v}_2 = 0$$

We werken de scalaire producten uit met goniometrische vorm:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \vartheta \quad \text{met } \vartheta \text{ de hoek tussen } \mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b}$$

Verder weten we uit de regel van het aantal touwen dat  $v_2 = 3v_1$  We krijgen dus:

$$L \cdot v_1 \cdot \cos 180^\circ + S \cdot v_2 \cdot \cos 0^\circ = -L \cdot v_1 + S \cdot 3 \cdot v_1 = 0$$

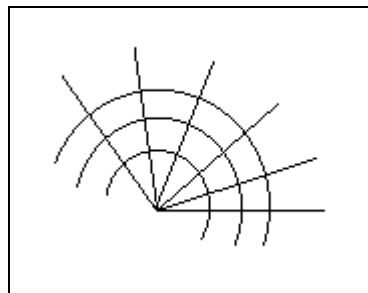
Waaruit :  $S = L/3$  .

#### 4. Meerdere vrijheidsgraden

Sommige systemen hebben meerdere vrijheidsgraden. Wanneer men uitdrukking IV invult in V bekomt men

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_j \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = 0 \quad (\text{VI})$$

De functie VI is nu een functie van meerdere onafhankelijke variabelen. Voor deze functies kan men een parameternet tekenen, d.i. een netwerk van krommen die men bekomt door 1 variable te laten veranderen en alle andere constant te houden. Door elk punt moet één exemplaar van de krommen behorend bij elke parameter passeren.



Figuur 3 : een parameternet voor poolcoördinaten

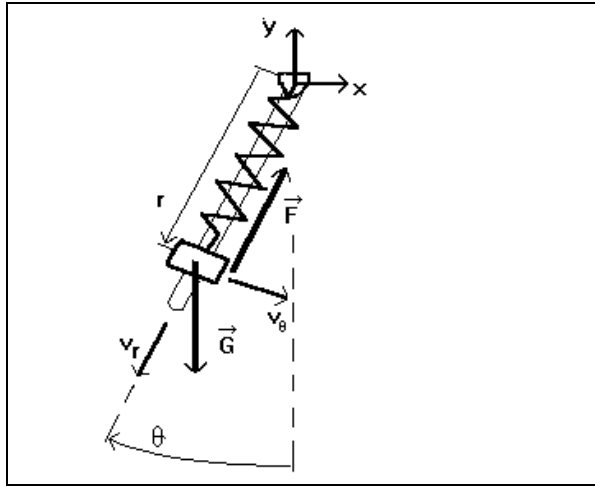
Voor evenwicht zal men een nulpunt moeten hebben voor de bijdrage volgens de raaklijn aan de kromme van elke onafhankelijke veranderlijke, van elke veralgemeende coördinaat. Dit betekent dat **voor elke j** moet gelden :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = 0$$

#### Voorbeeld 3

Nemen we het systeem van figuur 4 als voorbeeld van een systeem met meerdere vrijheidsgraden, hier 2. We onderstellen de staaf massaloos (dan is er ook geen kracht tussen massa en staaf). De krachten die op de massa werken zijn:

- de zwaartekracht  $\mathbf{G}$
- de kracht van de veer  $\mathbf{F}$



Figuur 4

Als veralgemeende coördinaten zullen we hier de poolcoördinaten gebruiken. De snelheid  $\mathbf{v}$  kan dus gesplitst worden in een component  $\mathbf{v}_r$ , veroorzaakt door een verandering van  $r$ , en  $\mathbf{v}_\theta$  veroorzaakt door de verandering van  $\theta$ . Hier zijn dit orthogonale componenten, maar dit hoeft niet. Opsplitsen volgens deze componenten levert:

$$\vec{F} \cdot (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) + \vec{G} \cdot (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = (\vec{F} + \vec{G}) \cdot \vec{v}_r + \vec{G} \cdot \vec{v}_\theta = 0$$

Daar het effect van een verandering van elke parameter nul moet zijn is dit equivalent met (bemerkt dat  $\mathbf{F}$  steeds loodrecht staat op  $\mathbf{v}_\theta$ ):

$$(\vec{F} + \vec{G}) \cdot \vec{v}_r = 0$$

$$\vec{G} \cdot \vec{v}_\theta = 0$$

Of na uitwerken van de scalaire producten:

$$(-F + G \cdot \cos \vartheta) \frac{dr}{dt} = 0$$

$$G \cdot \sin \vartheta \cdot r \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

Daar  $dr/dt$  en  $r \cdot d\theta/dt$  de snelheidscomponenten zijn waarmee de massa ondersteld wordt door de evenwichtsstand te passeren is de eigenlijke evenwichtsvoorwaarde:

$$-F + G \cdot \cos \vartheta = 0$$

$$G \cdot \sin \vartheta = 0$$

Daar het hier over één puntmassa ging, had men deze vergelijkingen ook onmiddellijk op de klassieke manier kunnen vinden.

## 5. De klassieke formulering

Daar de energiebijdrage voor elke veralgemeende coördinaat nul moet zijn, heeft men voor elke  $q_j$ :

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \frac{dq_j}{dt} = 0$$

Zoals bij het voorbeeld hierboven, moet het nulpunt hier komen van de factor tussen de haken. Het blijkt dus dat het differentiëren van de veralgemeende coördinaat naar de tijd een overbodige bewerking is. Men zou zich dus kunnen beperken tot het differentiëren van de  $\mathbf{r}_i$  naar de  $q_j$ . Klassiek echter schrijft men de evenwichtsvoorwaarde van de virtuele arbeid onder de vorm van een differentiaal en met de specifieke delta  $\delta$ . In plaats van VI krijgen we dan:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = 0 \quad (\text{VII})$$

$i$  loopt over alle krachten en  $j$  over alle vrijheidsgraden.

De factor  $\delta q_j$  staat hier niet voor een ingebeelde verplaatsing, zoals meestal gezegd wordt, maar voor de aanduiding van de onafhankelijke variabele.

De gewoonte om deze uitdrukking als een differentiaal te schrijven is in de praktijk zeer nuttig. Voor een systeem met één vrijheidsgraad zullen alle termen immers in functie van één veralgemeende coördinaat moeten uitgedrukt worden, moeten dus alle termen eindigen op dezelfde  $\delta q$ . Als dit niet het geval is moeten er supplementaire verbanden tussen de gebruikte parameters gezocht worden. Indien er meerdere vrijheidsgraden zijn zal men groeperen naar de verschillende  $\delta q_j$  en moet de coëfficiënt van elke  $\delta q_j$  nul zijn. Er zijn dus steeds evenveel vergelijkingen als veralgemeende coördinaten of vrijheidsgraden:

$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = 0$	voor elke $q_j$	(VIII)
---	-----------------	--------

De factor  $\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  zal de dimensie hebben van een kracht als de  $q_j$  een verplaatsing is of de dimensie van een moment als de  $q_j$  een hoek is. Het product van deze factor met  $\delta q_j$  moet immers de dimensie van een arbeid hebben.

Wanneer er momenten gegeven zijn kan men de virtuele arbeid van deze momenten berekenen als

$$\vec{M} \cdot \delta \vec{\vartheta}$$

Men zou dus steeds een term van de vorm

$$\sum_i \vec{M}_i \cdot \delta \vec{\vartheta}_i = \sum_i \sum_j \vec{M}_i \cdot \frac{\partial \vec{\vartheta}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

mogen toevoegen aan VII. Dikwijls zal  $\theta$  zelf een veralgemeende coördinaat zijn, zodat de uitdrukking beperkt blijft tot de vorm van het linkerlid. De meest algemene vorm van de methode van de virtuele arbeid is dus :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \delta \vec{\vartheta}_i = 0 \quad (\text{IX})$$

## 6. De klassieke uitwerking

Voor de praktijk zullen we dus geen snelheden berekenen, maar alleen de differentiaal van de verplaatsing. We beginnen best met eerst de vectoriële vorm volgens IX op te schrijven . Voor figuur 4 b.v. geeft dit :

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{G} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Nu moet men beslissen hoe men elk van de termen, elk scalair product, zal uitrekenen. Een scalair product kan men uitrekenen in termen van ortogonale coördinaten of m.b.v. de goniometrische vorm.

### a) Berekening in termen van ortogonale coördinaten

Voor elke term geldt:

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \sum_i F_i \cdot \delta r_i = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z$$

- Hierbij stellen  $F_x, F_y, F_z$  de projecties op de assen voor, met het **correcte teken**.
- De factoren  $\delta x, \delta y, \delta z$  berekent men door differentiëren van de coördinaten van de aangrijpingspunten . Hierbij moeten deze coördinaten het **correcte teken hebben !**

De uitwerking in termen van ortogonale coördinaten is vooral aangewezen als de krachten evenwijdig zijn aan de coördinaatassen. De bovenstaande som telt dan immers maar één term.

### Voorbeeld

Voor figuur 4 is deze methode aangewezen voor het gewicht:

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{r} = -G \cdot \delta y$$

Met

$$y = -r \cdot \cos \vartheta$$

$$\delta y = -\delta r \cdot \cos \vartheta + r \cdot \sin \vartheta \cdot \delta \vartheta$$

Invullen in vorige uitdrukking levert:

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{r} = G \cdot \cos \vartheta \cdot \delta r - G \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \delta \vartheta$$



## b) Berekening met de goniometrische vorm

Bij de goniometrische vorm gaat men de kracht projecteren op de raaklijn aan de baan gevolgd bij toename van de veralgemeende coördinaat. Het is duidelijk dat de bijdrage van het gewicht in de vorige berekeningen ook op deze manier kan gelezen worden. In de praktijk zal de goniometrische vorm vooral nuttig zijn bij schuin geplaatste krachten waarbij de projectie van de kracht op de raaklijn sneller en eenvoudiger op te schrijven is dan de uitdrukking in termen van orthogonale coördinaten. Dit is vooral het geval als de richting van kracht en raaklijn steeds samenvalt (hoek tussen beide  $0^\circ$  of  $180^\circ$ ) en deze richting zelf veranderlijk is. Denk b.v. aan het schuine touw in figuur 2. Men kan dit onder verscheidene hoeken houden, maar als men het scalair product met de goniometrische vorm uitwerkt, dan heeft deze hoek geen belang (zoals hij trouwens fysisch geen belang heeft). Een ander voorbeeld wordt hieronder uitgewerkt.

### Voorbeeld

Voor  $\mathbf{F}$  in figuur 4 werd reeds opgemerkt dat een verandering van  $\theta$  resulteert in een verplaatsing loodrecht op  $\mathbf{F}$ , dus zonder energieverandering. Alleen bij verandering van  $r$  zal er arbeid geleverd worden door of op de veer. Daar een toename van  $r$  een verplaatsing oplevert in tegengestelde zin van de kracht, wordt de goniometrische vorm:

$$\vec{F} \bullet \delta\vec{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos 180^\circ = -F \cdot \delta r$$

Groeperend naar de veralgemeende coördinaten krijgen we dus voor het geheel van figuur 4 :

$$\sum_i \vec{F}_i \bullet \delta\vec{r}_i = (-F + G \cdot \cos \vartheta) \cdot \delta r + (G \cdot \sin \vartheta) \cdot \delta \vartheta = 0$$

Dit resulteert in dezelfde twee vergelijkingen zoals hoger.

## c) Speciaal geval: potentiaalkrachten

Volgens formule 5-15 van de cursus geldt voor een potentiaal kracht  $\mathbf{F}$ :

$$E_p = -\int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\vec{F} \bullet \delta\vec{r} = -\delta E_p$$

### Voorbeeld

De potentiële energie van de veer in figuur 4 wordt duidelijk alleen beïnvloed door de parameter  $r$ :

$$E_p = k \cdot (r - l_0)^2 / 2$$

Waaruit :

$$\vec{F} \bullet \delta\vec{r} = -\delta E_p = -k \cdot (r - l_0) \cdot \delta r = -F \cdot \delta r \quad \dots \text{ut supra.}$$

## 7. Keuze van het assenkruis

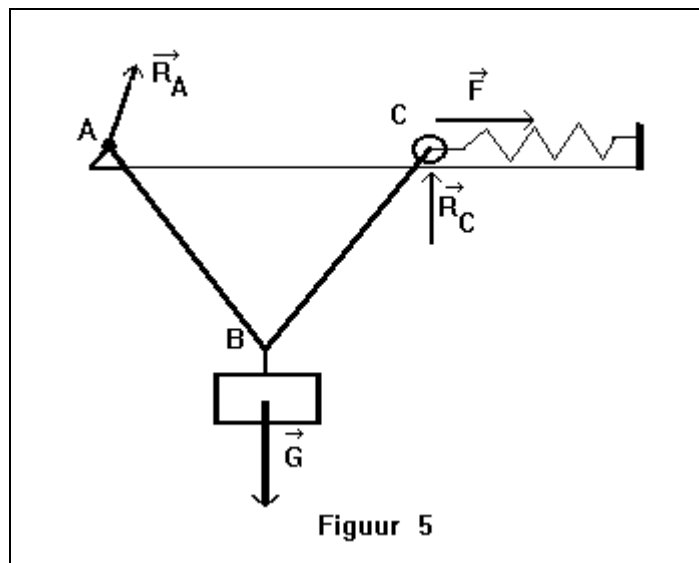
Bij virtuele arbeid gebruikt men de posities van de aangrijpingspunten. Het assenkruis van de posities zal dus nauwkeurig moeten gespecificeerd worden: plaats van de oorsprong, oriëntatie van de assen.

Bij virtuele arbeid houdt men geen rekening met krachten in ideale verbindingen. Het mechanisme waardoor de ideale verbindingen met de omgeving geen arbeid leveren of afvoeren, berust op het feit dat ofwel het aangrijpingspunt zich niet verplaatst, ofwel zich alleen loodrecht op de kracht verplaatst. Dit is normaal alleen het geval in een vast assenkruis.

Wanneer men een assenkruis vastmaakt aan een bewegend punt van het systeem, dan kan men elke verplaatsing schrijven als een som van een sleepverplaatsing (verplaatsing van dat punt) en een relatieve verplaatsing t.o.v. dat punt. Alle sleepverplaatsingen geven een term die bestaat uit de som van alle krachten  $\times$  de sleepverplaatsing. Daar bij evenwicht de som van alle krachten nul is, verandert dit de arbeidsbalans niet. Maar binnen een bewegend assenkruis zullen de aangrijpingspunten van de ideale verbindingen een andere (relatieve) beweging uitvoeren dan in het vaste en kunnen dan wel arbeid uitwisselen met het systeem. Men zou in dit geval dus zeer zorgvuldig alle krachten en hun aangrijpingspunt moeten beschouwen om te zien welke werkelijk nog ideale verbindingen zijn. Als men echter de reactiekrachten met de omgeving moet kennen, zal men meestal naar de klassieke oplossingsmethode moeten grijpen voor men virtuele arbeid zou kunnen toepassen. Dit is niet zinvol. In de praktijk moet men dus met een vast assenkruis werken.

### Voorbeeld

Nemen we als voorbeeld het systeem van figuur 5, waarin AB en BC ideale staven zijn. In elk vast assenkruis zullen de reacties  $\mathbf{R}_A$  en  $\mathbf{R}_C$  geen arbeid leveren bij een beweging van het systeem. Bevestigt men echter het assenkruis aan B, dan levert het gewicht geen arbeid meer, maar wel deze reactiekrachten. Hun aangrijpingspunten bewegen nu immers op een cirkel rond B. In feite is  $\mathbf{R}_A$  nog altijd een ideale verbinding, daar deze kracht volgens de staaf moet liggen en de verplaatsing van A steeds loodrecht op de staaf zal staan.

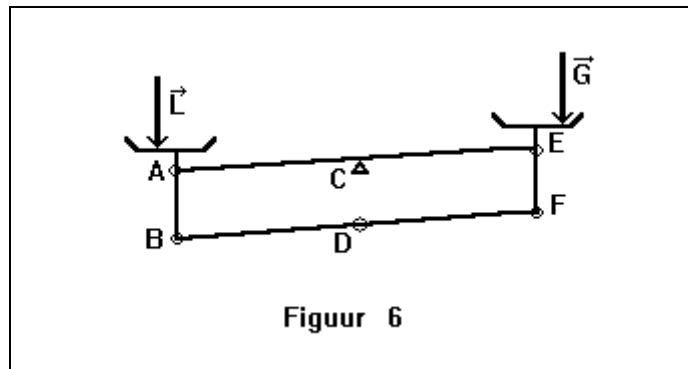


## 8. Enkele specifieke voorbeelden

Als voorbeeld van een toepassing waarbij de kracht van de methode van de virtuele arbeid tot uiting komt, beschouwen we eerst het probleem van de **klassieke keukenbalans**. Deze bestaat uit twee schalen, rustend op een arm die in het midden ondersteund is (zie figuur 6).

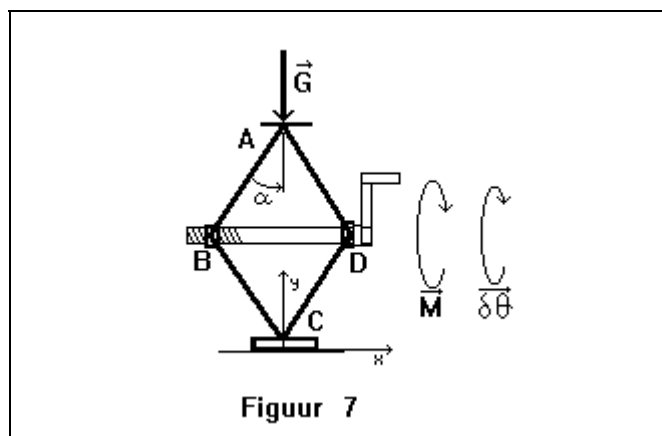
Het is ten zeerste wenselijk dat het resultaat van een weging niet beïnvloed wordt door de positie van de last of van de gewichten in de schalen. Stellen we de last voor door een kracht  $\mathbf{L}$  en de gewichten door een kracht  $\mathbf{G}$ , dan levert de methode van de virtuele arbeid (in een klassiek vertikaal horizontaal-assenkruis):

$$-G \cdot \delta y_G - L \cdot \delta y_L = 0$$



Opdat de positie binnen de schalen geen invloed zou hebben, moeten beide verticale verplaatsingen onafhankelijk zijn van de positie binnen de schaal. Dit betekent dus dat de schalen moeten **transleren**. Hiervoor is een eenvoudige constructie bekend, nl. de parallelogramgeleiding. De steun van de schalen wordt m.b.v. 2 staven op zijn plaats gehouden. De eindpunten van deze staven vormen een parallelogram. Hier is dit dubbel uitgevoerd, C en D zijn het midden van AE en BF en vaste scharnierpunten. De vierhoek ABFE is steeds een parallelogram en AB en EF blijven steeds evenwijdig met CD. Door deze eenvoudige constructie transleren de schalen en is  $\delta y_G$  en  $\delta y_L$  onafhankelijk van de positie binnen de schaal.

Het tweede probleem is het berekenen van de kracht geleverd door een eenvoudige



**ruitvormige krik.** (figuur 7)

In plaats van te rekenen met de kracht op de zwengel, zullen we rechtstreeks met het moment rekenen. De evenwichtsvoorwaarde is dan :

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} = 0$$

We voeren een klassiek assenkruis in, met oorsprong in C.  $\vec{G} \cdot \delta \vec{r}_A$  kan dan reeds herschreven worden als  $-G \cdot \delta y_A$ .

We hebben :  $y_A = 2a \cdot \cos \alpha$  en  $\delta y_A = -2a \cdot \sin \alpha \cdot \delta \alpha$

en dus :  $-G \cdot \delta y_A = G \cdot 2a \cdot \sin \alpha \cdot \delta \alpha$

Dit is echter een systeem met één vrijheidsgraad: bij draaien aan de zwengel moet ook  $\alpha$  veranderen. We moeten dus een verband zoeken tussen  $\delta \alpha$  en  $\delta \theta$ . In dat verband speelt de schroefdraad in B natuurlijk een centrale rol. Het verband tussen verdraaiing van zwengel en de verplaatsing van B wordt gegeven door de spoed van de schroefdraad. Deze spoed S wordt uitgedrukt in cm/toer : de lineaire verplaatsing veroorzaakt door een omwenteling van 1 toer. Bij  $\theta$  in radialen in plaats van toeren heeft men :

$$\Delta(BD) = \pm \frac{S}{2\pi} \Delta \theta$$

of met differentiaal:  $\delta(BD) = \pm \frac{S}{2\pi} \delta \theta$  (a)

Om te weten welk teken te gebruiken steunen we op het feit dat draaien in de richting van het moment de last omhoog doet bewegen. Als de last omhoog beweegt moet de afstand BD kleiner worden. We moeten dus het minteken kiezen. We drukken BD nu ook uit als functie van  $\alpha$  :

$$BD = 2a \cdot \sin \alpha \text{ . Hieruit halen we: } \delta(BD) = 2a \cdot \cos \alpha \cdot \delta \alpha$$

Alles invullen levert :

$$\delta(BD) = 2a \cdot \cos \alpha \cdot \delta \alpha = -\frac{S}{2\pi} \delta \theta$$

of :  $\delta \theta = -\frac{4\pi a \cos \alpha}{S} \delta \alpha$

Bij draaien in de richting van het moment wordt  $\vec{M} \cdot \delta \vec{\theta}$  gewoon  $M \cdot \delta \theta$  . De evenwichtsvoorwaarde wordt nu :

$$G \cdot 2a \cdot \sin \alpha \cdot \delta \alpha + M \cdot \delta \theta = 0$$

en uiteindelijk (mits  $\alpha \neq 0$ ):

$$G = \frac{2\pi}{S \tan \alpha} M$$

Bij  $\alpha=0$  wordt het gewicht  $G$  opgenomen door de staven zonder dat de stang BD erbij komt kijken (in theorie). Dit is een **speciale stand**, waarin de vergelijkingen feitelijk niet meer opgaan. Dit is typisch voor de methode van de virtuele arbeid: singulariteiten van de formules duiden op speciale standen waarin de oorspronkelijke vergelijkingen niet gelden.

## 9. Virtuele en werkelijke verplaatsingen

De virtuele verplaatsingen  $(\partial \vec{r}_i / \partial q_j) \cdot \delta q_j$  zijn minstens componenten van de werkelijke verplaatsing die het punt kan krijgen met behoud van de verbindingen. Er treedt alleen een verschil op tussen virtuele en werkelijke verplaatsingen bij dynamisch evenwicht, d.i. bij berekeningen aan bewegende systemen. Het verschil bestaat als de transformatievergelijkingen expliciet de tijd bevatten:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t)$$

In dat geval heeft men voor de **reële verplaatsing**:

$$d\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad (\text{X})$$

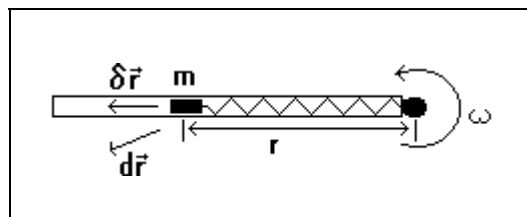
Een **virtuele verplaatsing** is dan een verplaatsing waarbij men alleen rekening houdt met de invloed van de veralgemeende coördinaten en niet met de **expliciete** invloed van de tijd, dus niet met de term  $(\partial \vec{r}_i / \partial t) dt$ . De virtuele verplaatsing is dus:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \quad (\text{XI})$$

Zie in dit verband echter ook de nota over de verscheidene varianten op het einde van deze tekst. In het geval van de statica vormen alle virtuele verplaatsingen samen ook de werkelijke verplaatsing.

In figuur 8 vindt men het klassieke voorbeeld van het verschil tussen de virtuele en de reële verplaatsing. Een buis draait met een constante hoeksnelheid rond een verticale as. In de buis kan een massa  $m$  glijden. Daar men de beweging rond de verticale as vastgelegd heeft, wordt de rotatie rond de verticale as niet meer als een vrijheidsgraad beschouwd. Men kan het tijdsverloop expliciet uitschrijven in de transformatievergelijkingen:

$$x = r \cdot \cos \omega t \quad \text{en} \quad y = r \cdot \sin \omega t$$



Figuur 8 : Het klassieke voorbeeld van een verschil tussen reële en virtuele verplaatsingen.

Op deze manier blijft er maar 1 vrijheidsgraad met veralgemeende coördinaat  $r$ . De virtuele verplaatsing is nu enkel de verplaatsing in de buis, de reële verplaatsing bevat ook het effect van de rotatie.

Alhoewel de definitie van een virtuele verplaatsing formeel lijkt op het beschouwen van de verplaatsing op een gegeven tijdstip, moet men toch wel bedenken dat elke transformatiever-

gelijking niet de positie van een systeem weergeeft, maar slechts de positie van een punt en dat ook de verschillende  $q_j$  uiteindelijk functie zijn van de tijd. Als men de tijd vastzet, gebeurt er hier dus niets meer en is er ook geen mogelijkheid om naar een ander punt van het systeem te gaan kijken. De situatie is dus fundamenteel verschillend van de beschrijving van b.v. een golf of een stroming.

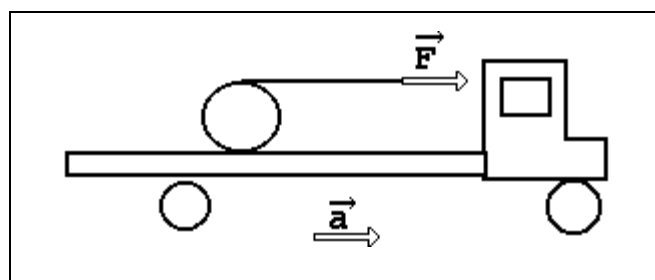
Het verschil tussen reële en virtuele verplaatsingen schijnt alleen op te treden als men niet alle mogelijke vrijheidsgraden als vrijheidsgraden behoudt. De expliciete tijdsterm is dan veroorzaakt door bijdragen van niet-beschouwde vrijheidsgraden en wordt daarom ook niet betrokken bij het zoeken naar een evenwicht.

## 10. Dynamisch evenwicht

Via het principe van d'Alembert kan een dynamisch evenwicht behandeld worden met de formules van de statica. Hiertoe voert men een traagheidskracht of een traagheidsmoment in. Op deze manier kan het rechterlid van I naar links overgebracht worden en heeft men een (pseudo) statische situatie. In principe verandert er niets aan wat er tot nu toe gezegd werd. Alleen kan er nu wel een verschil zijn tussen de reële en de virtuele verplaatsingen.

Alhoewel dit de klassieke benadering is, moet men in feite opmerken dat het principe van d'Alembert orthogonaal staat tot het principe van de virtuele arbeid (en de eventueel daarvan afgeleide vergelijkingen van Lagrange). Wiskundig maakt het immers geen enkel verschil uit of de versnellingssterm in het linker- of het rechterlid geschreven wordt.

Bij voorwerpen kan het nuttig zijn om naar de vorm van de kinetische energie te kijken om te weten welke traagheidsreactie men moet invoeren voor het principe van d'Alembert. Een term  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  in het rechterlid van I geeft immers aanleiding tot een term  $mv^2/2$  in de kinetische energie en een term  $I \alpha \cdot d\theta$  leidt tot een term  $I\omega^2/2$ . De vorm waarin de kinetische energie van een voorwerp geschreven wordt, geeft dus een aanwijzing voor de traagheidsreactie die moet ingevoerd worden, voorzover de betrokken term verband houdt met een te beschouwen vrijheidsgraad.



Figuur 9 : Rol op een versnellende wagen

Beschouwen we het voorbeeld van figuur 9. Op een wagen met versnelling  $\mathbf{a}$  ligt een rol waaraan getrokken wordt met een kracht  $\mathbf{F}$ . Men vraagt de hoekversnelling van de rol.

Volgens het principe van d'Alembert kan het effect van de versnellende wagen verrekend worden door het invoeren van een traagheidskracht  $\mathbf{F}_T$  gegeven door:

$$\vec{F}_T = - \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = m \vec{a}_c$$

De arbeid van  $\mathbf{F}$  wordt omgezet in een kinetische energie van de vorm  $mv_c^2/2 + I_c\omega_c^2/2$ . We moeten hier dus een traagheidskracht en een traagheidsmoment invoeren. Daar de wrijving onderaan geen arbeid levert of opneemt, wordt ze niet verrekend. We krijgen dan :

$$\vec{F}_T \cdot \delta \vec{r}_c + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_F - m \vec{a}_c \cdot \delta \vec{r}_c - I_c \vec{\alpha} \cdot \delta \vartheta = 0$$

Men vindt gemakkelijk:

$$[-m(a_w + r\alpha)r - I_c\alpha + F2r]\delta\vartheta = 0$$

waaruit  $\alpha$  kan bepaald worden.

## Appendix :

### Verscheidenheid troef

De methode van de virtuele arbeid wordt op veel verschillende manieren gepresenteerd. Het is ook reeds een zeer oude methode. De eerste redeneringen van deze vorm vindt men reeds bij Simon Stevin(1548-1620) en Galileo(1564-1642), dus bijna honderd jaar voor Newton(1642-1726). Op dat ogenblik was de differentiaal- en integraalrekening nog onbestaande en misschien ligt daar voor een deel de oorzaak van het spreken over ingebeelde verplaatsingen.

De methode werd verder ontwikkeld door Bernouilli(1771), d'Alembert(1743) en Lagrange(1788). Ze wordt echter met zeer grote verschillen voorgesteld. Er zijn veel auteurs die werken met virtuele snelheden in plaats van virtuele verplaatsingen. De methode zou dan de methode van het virtuele vermogen moeten heten en wordt door sommigen dan ook zo genoemd. Het werken met virtuele snelheden vermijdt in elk geval dat men spreekt over infinitesimaal kleine verplaatsingen, een uitdrukking die met de huidige nauwkeuriger formulering van differentiaalrekenen bij vele wiskundigen in ongenade gevallen is. Bij de auteurs die met verplaatsingen werken zijn er enkele die met werkelijke verplaatsingen werken. Voor de meeste gaat het echter over differentialen van de verplaatsing.

Tenslotte zijn er verschillen in de verplaatsingen (of snelheden) die men beschouwt. Voor velen gaat het over volledig vrije verplaatsingen. In dat geval kan het principe van de virtuele arbeid omgewisseld worden met de tweede wet van Newton, d.i. men kan het principe van de virtuele arbeid als fundamenteel principe aannemen en daaruit dan de tweede wet van Newton afleiden. De verplaatsingen die de verbindings respektoren heten dan compatibele verplaatsingen. Hier werd alleen gewerkt met verplaatsingen die de verbindings respektoren. Het verschil tussen virtuele en werkelijke verplaatsingen is dus niet in het algemeen te formuleren.

H. Christiaen, 9/12/1993 4/2/1997 2/4/1998.