Berekenen van dynamisch evenwicht

Voor het berekenen van dynamische evenwichten zijn er verscheidene methodes. De meest bekende zijn het gebruik van traagheidsreacties. Deze traagheidsreacties kunnen verder gecombineerd worden met de methode van de virtuele arbeid. De methode van Lagrange voor het opstellen van bewegingsvergelijkingen wordt klassiek voorgesteld als een verdere ontwikkeling van deze aanpak. Zoals de methode van Lagrange krachtiger en eenvoudiger is voor het opstellen van bewegingsvergelijkingen, zo kan deze methode ook gebruikt worden als een krachtiger en eenvoudiger methode voor het opzoeken van dynamische evnwichten. Men moet dan wel enkele vereenvoudigingen doorvoeren, waarvoor de voorwaarden echter gemakkelijk te controleren zijn. We zullen 4 verschillende mogelijkheden toepassen op hetzelfde probleem, zodat men duidelijk de verschillen in complexiteit kan zien.

1. Traagheidsreacties

Traagheidsreacties kan men beschouwen als een wiskundige truuk om de wet van Newton ook te kunnen toepassen in een versnellend assenkruis. Binnen dat assenkruis wenst men alleen met de versnelling volgens de baan in dat assenkruis te werken, d.i. met de relatieve versnelling. Men kan dan de vergelijkingen laten kloppen met de wet van Newton als men de massa, vermenigvuldigd met alle andere termen van de absolute versnelling, naar het andere lid overbrengt, d.i. schrijft bij de krachten. Deze 'kracht', die door geen enkel ander voorwerp uitgeoefend wordt, noemt men dan een **traagheidskracht** of **pseudo-kracht**.

Deze benadering levert geen enkel probleem zolang het over puntmassa's gaat. Heeft men echter te maken met een voorwerp met een zeker uitgebreidheid, dan wenst men graag met één totale traagheidskracht te werken. Men kan daarbij uitgaan van de vaststelling dat op elk punt van het voorwerp een elementaire traagheidskracht zal werken. Al deze elementaire traagheidskrachtjes kan men dan proberen samen te stellen tot één resultante volgens de klassieke regels voor het samenstellen van krachten.

Wanneer het bewegend assenkruis, waarin men de fenomenen beschrijft, een translatie uitvoert, dan ontstaan alle elementaire traagheidskrachten onder invloed van dezelfde sleepversnelling. Men krijgt dus een veld van krachtjes, dat volledig analoog is aan het veld gecreëerd door de zwaartekracht, mits de valversnelling te vervangen door de sleepversnelling. Dit systeem is dus samen te stellen tot een zuivere resultante in het massacentrum.

Wanneer het over een roterend assenkruis gaat, dan wordt de situatie snel complexer en zou men kunnen denken aan het herleiden tot een resultante en een moment in het massacentrum. In de praktijk zal de methode alleen gebruikt worden bij situaties waarbij het veld van de traagheidsreacties een veld van evenwijdige krachten is. Voor de samenstelling kan men dan beroep doen op de bekende betrekking:

$$\vec{\mathbf{r}}_R = \frac{\boldsymbol{\Sigma} F_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\boldsymbol{\Sigma} F_i} \quad \text{met} \quad F_i : \text{projecties (met teken!) op de gemeenschappelijke richting.} \quad (1)$$

Bij het differentiëren van deze positie, voor het berekenen van de virtuele verplaatsing, moet men echter zorgen dat men de F_i als constant behandelt. Het gaat immers om het zoeken van een projectie van de kracht op de raaklijn aan de parameterkromme **in een punt**. De grootte van de kracht blijft dus constant. Zie hiervoor de eerste oplossing van het voorbeeld.

Men kan het opzoeken van dit aangrijpingspunt vermijden door de elementaire virtuele arbeid van de elementaire traagheidsreacties te berekenen en deze te integreren over het voorwerp. Dit maakt de methode weer wat bruikbaarder voor ingewikkelder situaties. Deze aanpak is te danken aan prof. G. Van der Perre.

2. Lagrange-vergelijkingen voor het bepalen van dynamisch evenwicht

De vergelijkingen van Lagrange worden normaal gebruikt voor het opstellen van bewegingsvergelijkingen. Ze bieden het grote voordeel dat ze niet uitgaan van vectoriële maar van scalaire grootheden als kinetische en potentiële energie. Verder worden ze geschreven als functies van parameters die voor het probleem een concrete betekenis hebben, de zogenaamde veralgemeende coördinaten, i.p.v. de cartesische coördianten van verschillende punten van het systeem.

Zoals de klassieke statica kan beschouwd worden als een toepassing van de wet van Newton, maar met versnelling 0, en van de rotatiewetten, maar met hoekversnelling 0, zo kan men ook de vergelijkingen van Lagrange gebruiken voor het zoeken van een positie waarbij een veralgemeende coördinaat een constante waarde aanneemt. Laten we deze veralgemeende coördinaat in het vervolg q_k noemen. Men zoekt dan naar een positie waarbij $\dot{q}_k = \ddot{q}_k = 0$. Ter herinnering: de vergelijking voor q_k ziet er als volgt uit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\delta L}{\delta q_k}\right) = Q_k \qquad (2)$$

Het is duidelijk dat men best zal vermijden termen te berekenen die toch 0 worden. De termen in $\ddot{q}_k$ ontstaan uit de eerste term van de Lagrange-vergelijkingen door het differentiëren naar de tijd van termen in. $\dot{q}_k$. Als we het geval van een potentiaalfunctie die functie is van $\dot{q}_k$ uitsluiten, dan ontstaat de eerste term in (2) door het differentiëren van de kinetische energie. Als dit een zuivere kwadratische (of hogere) functie is van $\dot{q}_k$, d.i. als er geen term van de eerste graad voorkomt in $\dot{q}_k$, dan zal elke term die volgt uit de uitwerking van de eerste term in (2) een factor in $\dot{q}_k$ of $\ddot{q}_k$ bevatten. Als we deze beide later toch nul moeten stellen, moeten we deze eerste term in (2) dus nooit berekenen. De voorwaarde dat de kinetische energie geen eerste graadsterm in $\dot{q}_k$ zou bevatten, zal gerealiseerd zijn als de **parameterkromme voor q_k loodrecht staat op de andere parameterkrommen**. Dit is een voorwaarde die vrij eenvoudig te controleren is.

Onder die voorwaarden kunnen we echter nog een stap verder gaan. Het is zelfs niet nodig om in de kinetische energie rekening te houden met een mogelijke $\dot{q}_k$. M.a.w. we kunnen de **kinetische energie opschrijven zoals ze zal zijn op het ogenblik van het evenwicht**. Dit is een tweede belangrijke vereenvoudiging.

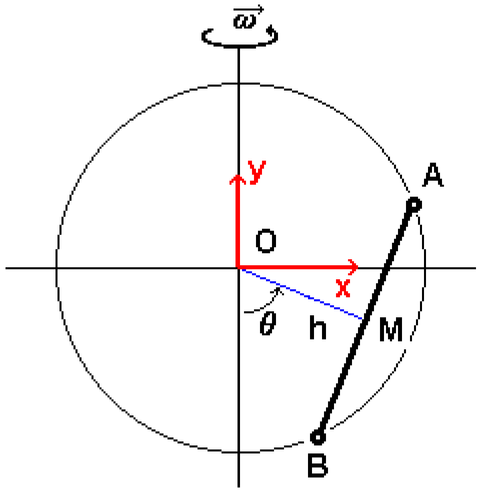
De vergelijking voor evenwicht herleidt zich dan tot:

$$-\left(\frac{\delta L}{\delta q_k}\right) = Q_k \qquad (3)$$

3. Voorbeelden

Als voorbeeld zullen we het evenwicht zoeken van een staaf, waarvan de eindpunten verplicht worden te glijden over een vertikale cirkel. Deze cirkel roteert rond een vertikale as door het centrum met een constante hoeksnelheid ω (zie figuur infra).

De verschillende methodes die we zullen gebruiken zijn:
1. traagheidsreacties met virtuele arbeid. Om de virutele arbeid van de traagheidsreactie te bepalen, zal eerst de totale traagheidsreactie en haar aangrijpingspunt bepaald worden.



2. traagheidsreacties met virtuele arbeid. We berekenen meteen de virtuele arbeid van de traagheidsreactie.
3. Klassieke diredimensionele rotatie
4. Aangepaste vergelijking van Lagrange.

Eerste methode: traagheidsreacties met virtuele arbeid - eerste versie

Bij deze eerste methode zullen we de totale traagheidsreactie en het aangrijpingspunt ervan berekenen. Daarna zullen we met virtuele arbeid de evenwichtshoek bepalen.

We voeren een parameter s in die de positie van een punt op de staaf bepaalt. De oorsprong voor s ligt in M en A komt overeeen met s=+L/2 en het punt B met s=- L/2. Daar de lijn h loodrecht staat op AB, vormt AB een hoek θ met de x-as. De cartesische coördinaten van een willekeurig punt op de staaf worden dus (denk aan een punt tussen A en M):

$$x = h \sin\theta + s\cos\theta$$

$$y = -h\cos\theta + s\sin\theta$$

De traagheidsreactie is functie van de normale versnelling. De elementaire traagheidsreacties vormen een stelsel van evenwijdige horizontale krachten. De totale traagheidsreactie wordt dus:

$$dF_T = x\omega^2 dm$$

$$F_T = \int_{-L/2}^{+L/2} (h.\sin\theta + s.\cos\theta)\omega^2 S\rho\, ds$$

$$= \omega^2 S\rho \int_{-L/2}^{+L/2} (h.\sin\theta + s.\cos\theta)\, ds$$

$$= \omega^2 S\rho \left[h.\sin\theta . s + (s^2/2).\cos\theta\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \omega^2 S\rho h.\sin\theta . L = m\omega^2 h \sin\theta$$

Bemerk dat even machten in s wegvallen. Het aangrijpingspunt van deze kracht wordt gegeven door:

$$s_F = \frac{\int s.dF}{\int dF}$$

De teller van deze breuk is:

$$= \omega^2 S\rho \int_{-L/2}^{+L/2} (h.\sin\theta.s + s^2.\cos\theta)\,ds$$

$$= \omega^2 S\rho \left[h.\sin\theta.\frac{s^2}{2} + \cos\theta.\frac{s^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \omega^2 S\rho L.\cos\theta.\frac{L^2}{3.4} = \omega^2 m\cos\theta.\frac{L^2}{12}$$

Uiteindelijk wordt het aan grijpingspunt:

$$s_F = \frac{\omega^2 m\cos\theta.\frac{L^2}{12}}{\omega^2 m\sin\theta.h} = \frac{L^2}{12.h.tg\theta}$$

De evenwichtsvergelijking voor de virtuele arbeid wordt:

$$\vec{G}.\delta\vec{r}_G + \vec{F}_T.\delta\vec{r}_F = 0$$

of

$$-G.\delta y_G + F_T.\delta x_F = 0$$

Met

$$y_G = -h.\cos\theta \quad \text{en dus } \delta y_G = h.\sin\theta.\delta\theta$$

$$x_F = x_M + s_F.\cos\theta \quad \text{en dus } \delta x_F = (h.\cos\theta - s_F.\sin\theta)\delta\theta$$

Hierbij wordt s_F dus als constant behandeld.
Wanneer men alles invult krijgt men:

$$G.h.\sin\theta.\delta\theta = m.\omega^2.h.\sin\theta\,(h.\cos\theta - s_F.\sin\theta)\delta\theta$$

Men kan h wegdelen. Er is een eerste oplossing voor sin θ = 0 of θ = 0. Dan ligt de staaf horizontaal en is er evenwicht voor alle ω.

De niet-triviale oplossing voor θ verschillend van 0 volgt, na invullen van de uitdrukking voor s_F, uit de vergelijking:

$$g = \omega^2.h.\cos\theta\,(1 - \frac{L^2}{12.h^2})$$

Tweede methode: traagheidsreacties met virtuele arbeid - tweede versie

Bij deze aanpak zullen we geen totale reactie en geen aangrijpingspunt berekenen, maar meteen de elementaire virtuele arbeid van een elementaire traagheidsreactie en deze integreren over de staaf.

We vertrekken van dezelfde vergelijking voor de virutele arbeid als hierboven. De berekening de virtuele arbeid van de traagheidsreactie wordt:

$$F_T.\delta x_F = \int \delta x_F.dF_T = \int_{-L/2}^{+L/2} (h.\cos\theta - s.\sin\theta)\delta\theta.x.\omega^2\rho S ds$$

$$= \omega^2\rho S\delta\theta \int_{-L/2}^{+L/2} (h.\cos\theta - s.\sin\theta)(h.\sin\theta - s.\cos\theta)ds$$

$$= \omega^2.\rho SL.\delta\theta.\sin\theta.\cos\theta.(h^2 - \frac{L^2}{12})$$

$$= \omega^2 m.\sin\theta.\cos\theta.(h^2 - \frac{L^2}{12})\delta\theta$$

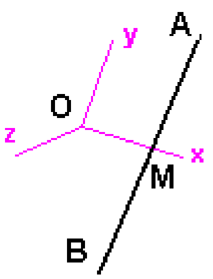
Dit leidt uiteindelijk tot dezelfde oplossing als bij de eerste methode:

$$g = \omega^2.h.\cos\theta\,(1 - \frac{L^2}{12.h^2})$$

Er is minder kans op fouten omdat hier het probleem van het constant houden van s_F niet opduikt. Ook is de berekening iets korter. Er valt wel een zwaardere integraal uit te rekenen.

Derde methode: driedimensionele rotatie

Daar er maar 1 veranderlijke gevraagd wordt, zullen we proberen om alleen de momentenvergelijking te gebruiken. De reactiekrachten in A en B wijzen door het centrum O van de cirkel. We berekenen dus het impuls moment t.o.v. O. Hiervoor voeren we een hoofdtraagheidsassenkruis in O in:



We moeten Steiner gebruiken om de traagheidsmomenten volgens y- en z-as te berekenen. We vinden:

$I_{xx} = ml^2/12$

$I_{yy} = mh^2$ (het traagheidsmoment van de staaf rond haar eigen as wordt normaal 0 gesteld)

$I_{zz} = ml^2/12 + mh^2$

De ogenblikkelijke rotatie is alleen ω. We krijgen:

$\boldsymbol{\omega} = (-\omega.\cos\theta\ ,\ \omega.\sin\theta\ ,0)$

De L-vector heeft dus een x- en y-component. De term **ω x L** heeft alleen een z-component:

$\omega_x.L_y - \omega_y.L_x = -\omega^2.\cos\theta.\ mh^2 \sin\theta + \omega^2 \sin\theta.(\ ml^2/12)\cos\theta$

(Bedenkt dat ω_x en L_x negatief zijn) Men krijgt uiteindelijk als vergelijking:

$- mgh.\sin\theta = m.\omega^2.\sin\theta.\cos\theta.\ (-h^2 + l^2/12)$

of

$$g = \omega^2.h.\cos\theta\,(1 - \frac{L^2}{12.h^2})$$

wat dezelfde vergelijking is die ook met de vorige methodes bekomen werd:

Nota

Wanneer men niet zeker is of het assenkruis in O wel een hoofdtraagheidsassenkruis is, kan men de L-vector berekenen met de formule:

$$\vec{L} = \vec{J} + \vec{S} = \vec{r} \times m\vec{v}_{m.c.} + \vec{L}_{m.c.}$$

In woorden: het impulsmoment van een voorwerp is te schrijven als baanimpulsmoment + spin. Deze formule kan afgeleid worden m.b.v. wat klassiek de **verplaatsingsformule** heet. In het hoofdstuk over samenstellen van krachten is deze naam echter gebruik voor iets anders, zodat ik in mijn tekst over samenstellen van krachten dit de formule voor de verplaatsing van de momenten genoemd heb. Het is één van de vele toepassingen van deze verplaatsingsformule buiten het domein van de krachten. Ze laat ook toe om op een envoudige manier de impulsmomentvector L te bepalen in een assenkruis dat geen hoofdtraagheidsassenkruis is, zonder de nevendiagonaalelementen van de traagheidstensor te moeten berekenen.

Vierde methode: vereenvoudigde Lagrange-vergelijking

Bij dit systeem staat de parameterkromme voor een punt bij verandering van θ duidelijk loodrecht op de verplaatsing door ω . We kunnen dus de vereenvoudigde Lagrange-vergelijking toepassen.

Voor de kinetische energie kunnen we de beweging beschouwen als een rotatie rond O. Dat is een vast punt zodat de kinetische energie te schrijven is als:

$$T = \frac{1}{2}\sum I_{ii}\omega_i^2$$

Hier wordt dit, met de traagheidsmomenten en de $\boldsymbol{\omega}$ zoals in de vorige uitwerking:

$$T = \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{L^2}{12}\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta\right)$$

De potentiële energie wordt : $V = - mg\cos\theta$

De evenwichtsvoorwaarde herleidt zich tot

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\theta} = 0$$

Dit levert:

$$m\omega^2\left(-\frac{L^2}{12}\cos\theta\sin\theta + h^2\cos\theta\sin\theta\right) - mgh\sin\theta = 0$$

Dit is hetzelfde resultaat dat we bij de vorige berekeningen vonden en leidt wederom tot de niet-triviale oplossing:

$$g = \omega^2.h.\cos\theta\left(1 - \frac{L^2}{12.h^2}\right)$$

Zoals men kan vaststellen is dat zowat de eenvoudigste methode.

H. Christiaen
Heverlee, 23 februari 2000